

3 ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ

3.1 Основные понятия математической статистики

Основные понятия математической статистики: эмпирические и теоретические распределения, нормальное и стандартное распределение; понятие квантилей, асимметрии эксцесса, статической надежности; распределения Стьюдента, Фишера, χ^2 -распределения.

Современные методы обработки и анализа экспериментальных данных с оценкой их параметров и проверкой гипотез, а также планирования эксперимента базируются на основе положений математической статистики – одного из разделов математики.

По образному выражению Дж. Бласса: «У математической статистики была «мать» – статистика, которой нужно было представлять отчеты правительственных подразделений и «отец» – честный карточный игрок, который полагался на математику, усиливавшую его ловкость – умение брать взятки в азартных играх. От матери ведут свое происхождение счет, измерение, описание, табулирование, упорядочение и проведение переписей, то есть все то, что привело к современной описательной статистике. От отца возникла, в конечном счете, современная теория статистического вывода, непосредственно базирующаяся на теории вероятности. Описательная статистика служит инструментом, описывающим, обобщающим или сводящим к желаемому виду свойства массивов данных».

Теория статистического вывода – это формализованная система методов решения задач, как правило, характеризуемых попытками вывести свойства большого массива данных путем исследования выборки. Исследования такого типа называются выборочными.

Вся группа объектов, подлежащих изучению, называется генеральной совокупностью, а та часть объектов, которая попала на проверку – выборочной совокупностью или просто «выборкой». Число элементов в генеральной совокупности и выборке называют их объемом. Итак, задача статистического вывода состоит в том, чтобы предсказать свойства всей совокупности, зная только свойства выборки из этой совокупности.

Планирование и анализ экспериментов представляют собой важную часть статистических методов, разработанных для обнаружения и проверки причинных связей между переменными. Следует иметь в виду, что никакая статистическая обработка не может заставить плохой опыт дать хорошие результаты. Главное – поставить добротные, целенаправленные опыты, а математическая статистика помогает в выборе оптимальных условий, для проведения опыта, дает объективную количественную оценку экспериментальным данным.

Перед тем, как перейти к конкретным способам оценки экспериментальных данных рассмотрим ряд понятий и положений математической статистики, используемых в практике научно-исследовательской работы.

Эмпирические и теоретические распределения.

Многие исследования в области механизации сельского хозяйства сопровождаются сбором обширного цифрового материала. К таким исследованиям относится изучение размерной характеристики различных смесей семян с целью подбора решет для их разделения, размерная характеристика убираемой культуры при обосновании высоты среза и тому подобное.

Анализ этого материала облегчается систематизацией и представлением исходных данных в виде таблиц и графиков.

Допустим, что в результате измерения длины растений льна мы получили данные, расположенные в порядке их измерения. Необходимо сгруппировать значения X_1, X_2, \dots, X_{100} в

«**K**» групп с интервалом каждой группы **i**. Ориентировочно число групп равно корню квадратному из объема выборки, которое, однако, не должно быть меньше 5 и больше 20.

Величину интервала групп определяют по соотношению:

$$i = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\text{число групп}} = \frac{R}{K}, \quad (3.1)$$

В нашем случае при $X_{\max}=115$ и $X_{\min}=45$ целесообразно взять 7 групп. В этом случае величина интервала будет равна целому числу:

$$i = \frac{R}{K} = \frac{115 - 45}{7} = \frac{70}{7} = 10 \text{ см}$$

При выборе границ групп следует обращать внимание на то, чтобы верхняя граница группы была меньше, чем нижняя граница прилегающей соседней группы на цену деления шкалы измерения (в данном случае на 1 см). Далее определяют частоту попадания конкретных измерений в каждый из интервалов и заносят интервалы, частоту и средние значения интервалов в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 Сгруппированное распределение частот по данным измерения

Интервал группировки	Частота f	Среднее значение группы
45-54	1	50
55-64	3	60
65-74	21	70
75-84	40	80
85-94	23	90
95-104	9	100
105-115	3	110

Указанный в таблице 3.1 ряд пар чисел составляет эмпирическое распределение частот – распределение частот **f** по

значениям X_i . Сумма частот равна объему совокупности $\Sigma f = n = 100$. Визуальное представление о распределении частот будет более наглядным при графическом изображении – рисунок 3.1.

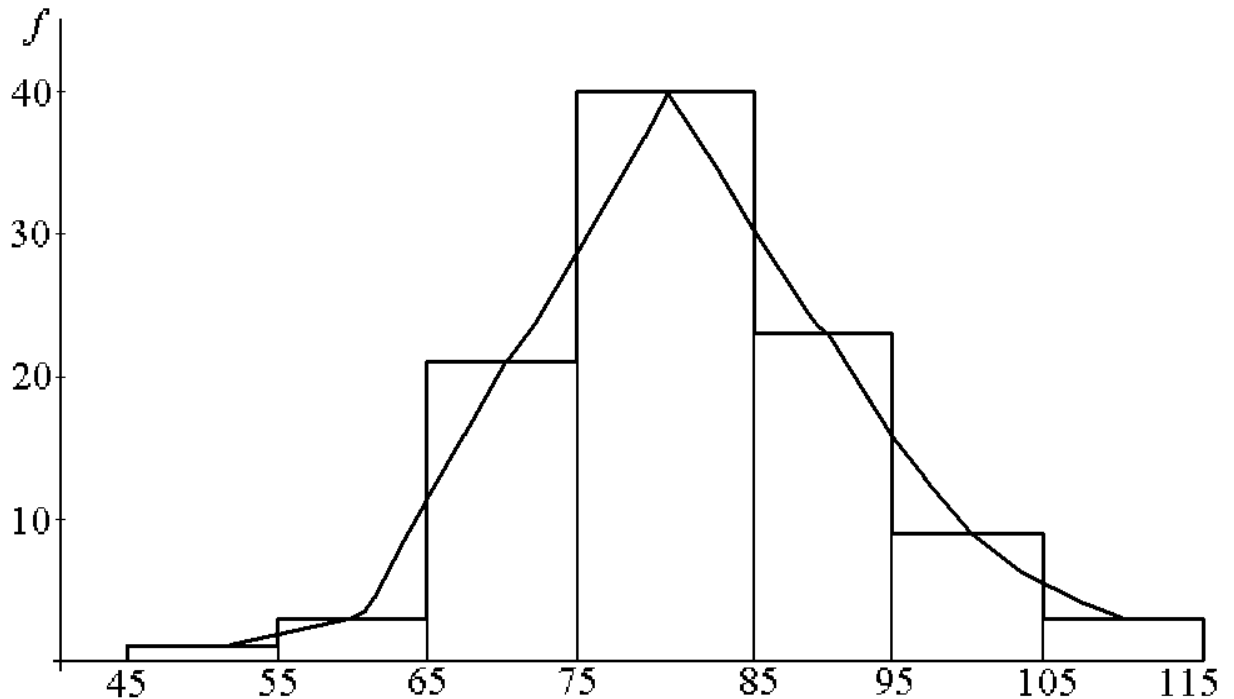


Рисунок 3.1 Гистограмма и полигон эмпирического распределения

Графическое изображение вариационного ряда называется кривой распределения или вариационной кривой. Ступенчатый график в виде столбиков, имеющих высоту, пропорциональную частотам, а ширину – равную интервалам классов называется *гистограммой*, а кривая линия, соединяющая середины интервалов – *полигоном*. При построении графика целесообразно руководствоваться правилом «золотого сечения», согласно которому высота графика должна относиться к его ширине примерно как 5:8. Характер распределения высоты растения льна имеет общие закономерности: случайные величины группируются вокруг центра распределения, при удалении от которого вправо или влево частоты их убывают.

Тенденция значений признака группироваться вокруг центра распределения частот, статической характеристикой которого является средняя арифметическая \bar{X} называется центральной тенденцией.

В статистике существуют и другие меры центральной тенденции, такие, например, как мода и медиана. Мода это такое значение в множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто. Медиана – значение, которое делит упорядоченное множество пополам, так что половина значений оказывается больше медианы, а другое меньше.

Таблица 3.2 Пример мер центральной тенденции

Множество	Среднее	Медиана	Мода
1,3,3,5,6,7,8	33:7	5	3
1,3,3,5,6,7,16	41:7	5	3

Наряду со средней арифметической, важной статистической характеристикой эмпирических распределений является стандартное отклонение S - мера разброса отдельных наблюдений вокруг среднего значения признака.

Квадрат стандартного отклонения S^2 называется дисперсией или средним квадратом. Среднее характеризует результат, даваемый методикой, а дисперсия – точность этого результата, точность методики. Среднее арифметическое и стандартное отклонение являются основными статистическими характеристиками, при помощи которых задается эмпирическое распределение частот.

В связи с тем, что в инженерных исследованиях редко приходится сталкиваться с качественной изменчивостью, то остановимся только на рассмотрении статистических характеристик количественной изменчивости. К ним относятся:

\bar{X} – средняя арифметическая; S^2 – дисперсия; S – стандартное отклонение; V – коэффициент вариации; $S_{\bar{x}}, \%$ – относительная ошибка выборочной средней.

Средняя арифметическая \bar{X} представляет собой обобщенную, абстрактную характеристику всей совокупности в целом. Определяется как

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}. \quad (3.2)$$

где $\sum X$ – сумма всех вариантов ($X_1+X_2+\dots+X_n$);
 n – число всех вариантов.

Взвешенная средняя арифметическая равна

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2 + \dots + f_n \cdot X_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}. \quad (3.3)$$

где X – значение признака варианты;
 f – частота встречаемости каждой варианты;
 n – общее число измерений ($n=\sum f$).

Основное свойство средней арифметической заключается в равенстве суммы всех положительных и всех отрицательных отклонений от нее

$$\sum(X - \bar{X}) = 0, \quad (3.4)$$

Дисперсия S^2 и стандартное отклонение S служат основными мерами вариации, рассеяния изучаемого признака.

Дисперсия представляет собой частное от деления суммы квадратов отклонений $\sum(x - \bar{x})$ на число всех измерений без единицы ($n-1$):

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad (3.5)$$

Чтобы получить меру вариации в размерности изучаемого признака из дисперсии извлекают корень квадратный

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}}. \quad (3.6)$$

и получают характеристику называемую стандартом или среднеквадратическим отклонением.

Из математической статистики известно, что при определении любых средних величин сумму всех показателей необ-

ходимо делить на число независимых друг от друга величин. При вычислении средней арифметической так и происходит, так как все величины независимы друг от друга и их сумма делится на число вариантов n . При определении дисперсий суммируются квадраты отклонений. Среди них есть одно такое, величину которого можно определить из условия $\sum(x - \bar{x}) = 0$, то есть зависящее от других. Остальные могут свободно варьировать, принимая любые значения. Число свободно варьирующих величин называется степенью свободы вариации. В связи с этим числом независимых величин при определении S^2 и S равно не n , а $n-1$. Таким образом, знаменатель выборочной дисперсии всегда равен разности между объемом выборки и числом связей, налагаемых на нее.

Стандартное отклонение служит показателем, который дает представление о наиболее вероятной средней ошибке отдельного единичного наблюдения взятого из данной совокупности. В пределах одного значения ($\pm 1S$) укладывается примерно $2/3$ всех наблюдений или точнее $68,3\%$ всех вариантов, то есть основное ядро изучаемого ряда величин. Поэтому стандартное отклонение называют также основным отклонением вариационного ряда.

Возможны отклонения от \bar{X} , превосходящие $\pm 1S$, но вероятность их по мере удаления отклонений от $\pm 1S$ все время уменьшается. Так вероятность встретить варианту, отклоняющуюся от \bar{X} на величину больше $\pm 3S$ составляет $\approx 0,3\%$. Поэтому утроенное значение стандартного отклонения принято считать предельной ошибкой отдельного наблюдения.

Коэффициент вариации V - стандартное отклонение, выраженное в процентах к средней арифметической данной совокупности

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100, \% \quad (3.7)$$

Это относительный показатель изменчивости, имеющий смысл при изучении вариации признака, принимающего только положительные значения.

Изменчивость принято считать незначительной, если коэффициент вариации не превышает 10 %, средней - при V больше 10 %, но менее 20 % и значительной, если коэффициент вариации более 20 %.

Иногда целесообразно использовать величину, дополняющую значение M до 100 %. Этот показатель называют коэффициентом выравненности и определяют по равенству

$$B=100-V, \%. \quad (3.8)$$

Ошибка выборочной средней или ошибка выборки $S_{\bar{X}}$ является мерой отклонения выборочной средней \bar{X} от средней всей (генеральной) совокупности μ . Ошибки выборки возникают вследствие неполной представительности выборочной совокупности и свойственны только выборочному методу исследований. Понятно, что если бы были изучены все существующие варианты, то средняя была бы определена без ошибки.

Дисперсия и стандарт – это меры рассеяния или изменчивости: чем больше дисперсия или стандарт, тем больше рассеяны значения измерений.

Таким образом, при измерении неизменной величины среднеквадратичное отклонение (стандарт) является мерой точности среднеарифметического значения неоднократно измеренной неизменной величины.

Если же неоднократно измеряемая величина переменна, то вычисленные по ее измерениям значения стандарта показывают не только меру точности, как случайную ошибку измерения, но и меру изменчивости переменной.

Предельной возможной статистической ошибкой назовем отклонение

$$\frac{\Delta n(\bar{a})}{\bar{a}} = \frac{3S}{\bar{a}} \cdot 100\% \quad (3.9)$$

Величина ошибок зависит от степени изменчивости изучаемого признака, от объема выборки и определяется из выражения

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \quad (3.10)$$

Это же величина, выраженная в процентах от соответствующей средней, называется относительной ошибкой выборочной средней

$$S_{\bar{x}}, \% = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100. \quad (3.11)$$

Раньше эта величина называлась точностью опыта и обозначалась буквой **P** и использовалась для браковки опытов. Лабораторные опыты браковались, если **P** было больше 3 %, а полевые при **P** > 7...8 %.

От показателя **P**, как оценки точности опытов отказались, так как эта величина зависит не только от $S_{\bar{x}}$, но и от величины средней.

Далее рассмотрим ряд теоретических распределений, на основе которых построены статистические критерии, используемые при проверке некоторых гипотез. Наиболее часто в исследовательской работе опираются на нормальное распределение или специальные распределения (**t**, **F**, χ^2 – распределения), получаемые из нормального для определенно поставленной задачи и при ограниченном числе степеней свободы.

Нормальное распределение

В XVII веке в Европе некоторые математики проводили небольшие частные исследования, которые позже оформились в теории вероятности. Эти исследования, проведенные в частности Блезом Паскалем (1623-1662 гг.) и Пьером Ферма (1601-1665 гг.) выполнялись по просьбе Шевалье де Мере, азартного игрока. В начале XVIII столетия были предприняты некоторые усилия для поиска удобных приближенных методов вычислений в задачах теории вероятности. Как оценить

вероятность того, что n независимых испытаний события с вероятностью P получения одного (удача) из двух исходов обеспечат r -«удач»? Человеком, способным решить эту задачу, оказался в то время де Муавр. Решая задачу определения вероятности появления 0,1,2,...9 или 10 «орлов» в результате 10 бросаний монеты, решение которой представлено на рисунке 3.2, де Муавр сумел найти уравнение кривой, которая хорошо аппроксимирует кривую, полученную соединением концов отрезков на графике.

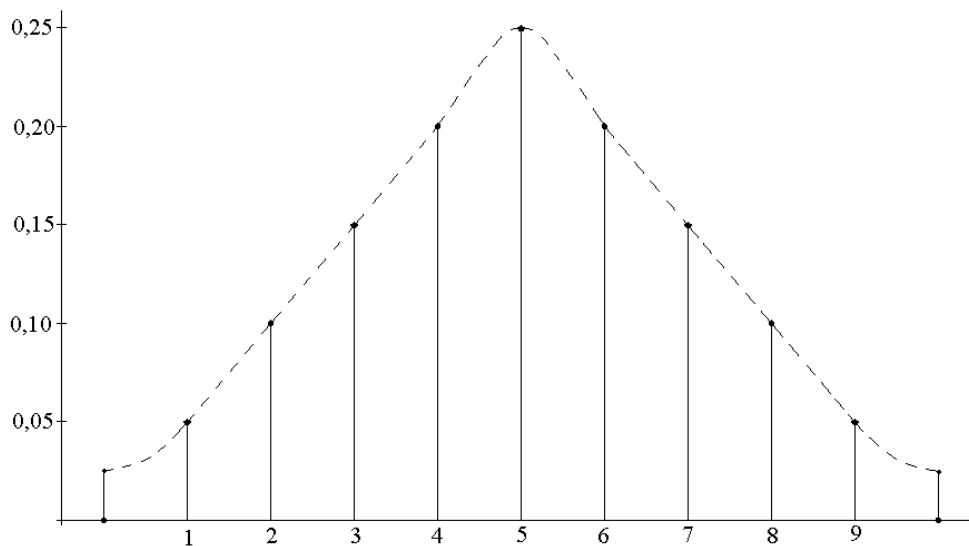


Рисунок 3.2 График нормального распределения

Ему удалось показать, что уравнение кривой, проходящей совсем близко от кривой, соединяющей концы отрезков, описывается выражением:

$$V = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}. \quad (3.12)$$

где V — ордината кривой или вероятность;

μ — генеральная средняя (математическое ожидание);

σ^2 — стандартное отклонение генеральной совокупности ($n \rightarrow \infty$);

π , e — константы ($\pi=3,14$, $e=2,72$).

Положение и форма кривой нормального распределения полностью определяется двумя параметрами: генеральной средней μ , которая находится в центре распределения и стандартным отклонением σ , которое измеряет вариацию отдельных наблюдений около средней. Максимум, или центр нормального распределения лежит в точке $x=\mu$, точки перегиба кривой находятся при $x_1=\mu-\sigma$; $x_2=\mu+\sigma$. При $x\pm\infty$ кривая достигает нулевого значения. По форме кривые нормального распределения могут быть различными. Вид кривой полностью соответствует степени варьирования изучаемого признака, то есть величине стандартного отклонения σ . Чем оно больше, и, следовательно, больше варьирование, тем более пологой становится вариационная кривая, при малых значениях σ она приобретает иглообразную форму. Размах колебаний от μ вправо и влево зависит от величины σ и укладывается в основном в пределах трех стандартных отклонений. Продолжение кривой за пределы $\mu\pm 3\sigma$ практически можно заметить лишь при большом числе наблюдений, и этими значениями ординат уже можно пренебречь. Для нормального распределения характерны следующие закономерности:

- в области $\mu\pm\sigma$ лежит 68,26% всех наблюдений,
- в области $\mu\pm 2\sigma$ лежит 95,46% всех наблюдений,
- в области $\mu\pm 3\sigma$ лежит 99,73% - практически все значения.

Приведенный выше закон нормального распределения представляет собой плотность распределения. Плотность есть производная функции распределения. Связь между плотностью и вероятностью хорошо иллюстрируется геометрически: вероятность того, что случайная непрерывная величина примет значение из интервала a, b равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью X , прямыми $X=a$, $X=b$ и графиком плотности $f(x)$ – рисунок 3.3.

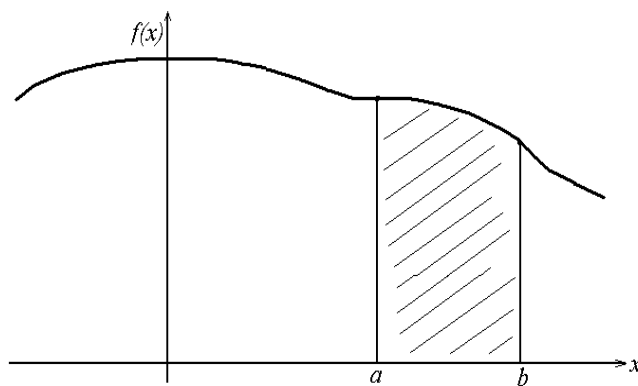


Рисунок 3.3 График плотности распределения

Функция нормального распределения складывает распределение вероятностей по отдельным значениям, увеличиваясь от значения к значению, является как бы функцией «накопленной вероятности».

Функция нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} dx. \quad (3.13)$$

В практических расчетах часто приходится решать задачу определения вероятности попадания величины ξ в любой заданный интервал (X_1, X_2) , что для нормального распределения дает выражение:

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\cdot\sigma^2}} dx. \quad (3.14)$$

Данный интеграл нельзя вычислить с помощью простых приемов интегрирования, но и нет смысла каждый раз самостоятельно проводить эти вычисления – лучше воспользоваться готовыми таблицами. По данным этих таблиц нетрудно вычислить:

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1). \quad (3.15)$$

Табулирование функции $F(X)$ наталкивается на одну трудность. Для каждого конкретных значений a и σ нужно составлять свою таблицу. Эту трудность удастся избежать, приводя все нормальные распределения к такому, у которого $\underline{a=0}$, $\underline{\sigma=1}$.

Это так называемое стандартное распределение. Его функция имеет вид:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (3.16)$$

Сама функция $F_0(x)$ не обладает четностью или нечетностью, но функция $\Phi(x) = F_0(x) - 1/2$ является нечетной, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, что позволяет сократить таблицу вдвое. Поэтому таблицу значений $\Phi(x)$ достаточно составить для $x > 0$. Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа. Она имеет следующий вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (3.17)$$

и вероятность попадания случайной величины в интервал $x_1 - x_2$ равна

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (3.18)$$

Допустим вначале, что нам надо найти вероятность

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\}. \quad (3.19)$$

Если ξ изменяется от x_1 до x_2 , то эта же случайная величина при переходе к стандартному распределению нормируется по формуле

$$\xi_\sigma = \frac{\xi - a}{\sigma}. \quad (3.20)$$

и изменяется в это же время

$$\text{от } \frac{x_1 - a}{\sigma} \text{ до } \frac{x_2 - a}{\sigma}$$

Отсюда вытекает основная формула

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \quad (3.21)$$

Пример: случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a=20$; $\sigma=10$. Какова вероятность, что оно примет значение лежащее между 15 и 40?

$$P\{15 \leq \xi \leq 40\} = \Phi\left(\frac{40 - 20}{10}\right) - \Phi\left(\frac{15 - 20}{10}\right) = \Phi(2) + \Phi(0,5)$$

Из таблиц приложения имеем

$$0,4772+0,1915=0,6687.$$

Понятие о квантиле

Для большинства встречающихся распределений, в том числе и нормального, часто используется понятие квантиля. Квантиль – общее понятие, а процентиля, децили и квартили – три его примера.

Квантиль, в принципе, это точка на числовой оси, которая делит совокупность на две разные группы с известными пропорциями в каждой из них. Квартили (кварто – четверть) делят на четыре равные части, квантили – на пять. Процентиля представляют собой точку ниже которой лежит P процентов оценок. Децили делят множество наблюдений на десять равных частей. Квантили очень удобны для обобщения данных.

Простое сообщение, что P_5 есть 10,75, а P_{15} – 16,80, сразу же говорит о том, что 5 % меньше 10,75, а 10 % лежит между 10,75 и 16,80.

Квантилем ξ_p распределения случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ называется решение уравнения

$$F(\xi_p)=P. \quad (3.22)$$

Иными словами квантиль ξ_p есть такое значение случайной величины ξ вероятность появления которого должно находиться в пределах этого квантиля

$$P\{\xi < \xi_p\}=p. \quad (3.23)$$

Вероятность p задаваемая в процентах дает название соответствующему квантилю, например $\xi_{0,3}$ называется 30 % квантиль.

Если известны два квантиля ξ_p и ξ_q , то имеем

$$P\{\xi_p \leq \xi \leq \xi_q\} = q - p. \quad (3.24)$$

На этом же равенстве и основано использование квантилей. Квантили стандартного ($a=0$; $\sigma=1$) распределения обозначаются через U_p и приводятся в таблицах.

Квантиль V_p общего нормального распределения с параметрами a и σ выражается через квантиль U_p стандартного распределения:

$$V_p = a + \sigma \cdot U_p. \quad (3.25)$$

Например, 40 % квантиль для нормального распределения с параметрами $a=4$; $\sigma=2$ равен:

$$V_{0,4} = 4 + 2(-0,25) = 4 - 0,5 = 3,5.$$

Понятие об асимметрии и эксцессе

Результаты различных наблюдений чаще всего располагаются приблизительно в соответствии с симметричной кривой нормального распределения, когда частоты вариантов, равноотстоящих от средней, равны между собой, то есть симметричны. Но бывает, что некоторые признаки растений и животных дают распределения, значительно отличающиеся от нормального – асимметричные или скошенные. Асимметрия может быть положительной или правосторонней, когда увеличиваются частоты правой части и отрицательной, когда увеличиваются частоты левой части вариационной кривой.

Причинами являются:

1. Неправильно взятая выборка, когда в нее вошло непропорционально много (или мало) представителей варианта с большим или меньшим их значением.

2. Действие определенных факторов, сдвигающих частоту варьирующего признака в ту или другую сторону от среднего значения.

Когда какие-либо причины благоприятствуют более частому появлению и средних и крайних значений признака, образуется так называемые положительные эксцессивные распределения, имеющие вид пирамиды с расширенным основанием или отрицательные эксцессивные распределения, когда в центре их имеется не вершина, а впадина и вариационная кривая становится двухвершинной. Многовершинные и двухвершинные кривые в большинстве случаев указывают, что в выборку попали представители нескольких совокупностей с разными сред-

ними. Например, посеяна смесь сортов, а мы измеряем длину стеблей.

Асимметричность оценивается показателем асимметрии:

$$A = \frac{\sum(x - \bar{x})^3}{m \cdot \sigma^3}. \quad (3.26)$$

если $A < 0,25$ – асимметрия незначительная;

$A = 0,25-0,50$ – асимметрия умеренная;

$A > 0,5$ – асимметрия значительная.

Более точную оценку асимметрии можно получить, вычислив ошибку показателя асимметрии по формуле:

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{n}}, \quad (3.27)$$

и определив величину

$$\frac{A}{m_A} \quad (3.28)$$

Если

$$\frac{A}{m_A} \geq 1,96,$$

то при большом числе измерений с вероятностью 95 % или больше можно говорить, что асимметрия существенна. При малом числе наблюдений оценка существенности асимметричности проводится по критерию Стьюдента t . Если величина отношения $\frac{A}{m_A}$ для определенного числа степеней свободы

$(n-1)$ получается равной табличной величине t или несколько больше ее, то с достоверностью соответствующей этой величине можно утверждать о наличии асимметрии.

Показатель эксцесса определяется по выражению

$$E = \frac{(x - \bar{x})^4}{m \cdot \sigma^4} - 3. \quad (3.29)$$

«+» – прямой эксцесс, «-» – обратный эксцесс.

При $E < 0,4$ – эксцесс слабый.

При $E = 2$ обратный эксцесс достигает своего максимального значения. Вершины кривой проваливается до самой оси

(раздвоение на две самостоятельные кривые). Ошибка показателя эксцесса в этом случае составит

$$m_e = 2 \cdot \sqrt{\frac{6}{n}}. \quad (3.30)$$

Существенность эксцесса может быть оценена, так же как и в случае асимметрии, посредством отношения

$$\frac{E}{m_e}. \quad (3.31)$$

и сравнением этой величины с величиной критерия Стьюдента при $f = n-1$ степеней свободы.

Если $\frac{A}{m_A}$ и $\frac{E}{m_e}$ меньше, чем величины t для 95 % доверительного уровня можно считать асимметрию и эксцесс несущественными и следовательно, рассматривать исследуемую совокупность измерений как подчиняющуюся нормальному закону распределения.

Понятие статистической надежности

Площадь под нормальной кривой ограниченную от среднего на t стандартных отклонений выраженную в процентах от всей площади называют *статистической надежностью* или уровнем вероятности P , то есть вероятностью появления признака, лежащего в области $\mu + t\sigma$. Величина, дополняющая уровень вероятности до единицы называется уровнем значимости. Он указывает на вероятность отклонения случайной величины от установленных пределов варьирования. При исследовании закономерностей в самом общем виде (без деталей), например, характера кривой развития достаточна надежность 0,67 (табличное значение 0,7). Для измерений связанных с конструкцией машины вполне достаточна надежность 0,9. При определении деталей закономерностей и значений величин, являющихся основой для дальнейших расчетов необходима надежность $N \approx 0,99$. Вероятность 0,95 или 95 % и уровень значимости 0,05 или 5 % обычно считается вполне приемлемым в большинстве исследований, но только не в тех случаях, когда речь идет о

жизни человека, например, при испытаниях парашютов, которые должны быть абсолютно надежны.

Другие распределения, используемые в практике статистических выводов

t – распределение Стьюдента

Закон нормального распределения проявляется при объеме выборки

$$n > 20 - 30$$

Однако, экспериментатор часто проводит ограниченное число измерений и основывает свои выводы на малых выборках. При небольшом числе наблюдений результаты обычно близки и редко появляются большие отклонения, поскольку согласно закону нормального распределения, вероятность появления малых отклонений больше чем значительных. Поэтому стандартное отклонение S (выборки) в большинстве случаев будет меньше, чем по всей генеральной совокупности σ . Следовательно, в этих случаях полагаться на критерии нормального распределения в своих выводах нельзя. С начала XX века в математической статистике стало разрабатываться новое направление – статистика малых выборок. Наибольшее практическое значение для экспериментальной работы имело открытое в 1908 году английским анатомом и химиком В. Госсетом (псевдоним Стьюдент) t – распределение, получившее название распределение Стьюдента.

Распределение Стьюдента для выборочных средних определяется равенством:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_{\bar{x}}}, \quad (3.32)$$

Здесь числитель формулы означает отклонение выборочной средней от средней всей совокупности μ , а знаменатель

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = S_{\bar{x}}, \quad (3.33)$$

является показателем, оценивающим величину

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sigma_{\bar{x}}, \quad (3.34)$$

или стандартную ошибку средней генеральной совокупности.

Таким образом, величина t измеряется отклонением выборочной средней \bar{X} от средней совокупности μ выраженным в долях ошибки выборки $S_{\bar{x}}$ принятой за единицу. Распределение Стьюдента имеет важное значение при работе с малыми выборками: позволяет определить доверительный интервал, покрывающий среднюю совокупности μ и проверить ту или иную гипотезу относительно генеральной совокупности.

F – распределение Фишера

Если из нормально распределенной совокупности взять две независимые выборки объемом n_1 и n_2 и подсчитать дисперсию S_1^2 и S_2^2 со степенями свободы $\nu_1=n_1-1$ и $\nu_2=n_2-1$, то можно определить отношение дисперсий:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}. \quad (3.35)$$

Отношение дисперсий берут таким, чтобы в числителе была большая дисперсия и поэтому $F \geq 1$. Распределение F зависит только от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 . Когда две сравниваемые выборки являются случайными независимыми из общей совокупности с генеральной средней μ , то фактическое значение F не выйдет за определенные пределы и не превысит критическое (табличное) для данных ν_1 и ν_2 теоретическое значение критерия F ($F_{\text{факт}} < F_{\text{теор}}$). Если $F_{\text{факт}} > F_{\text{теор}}$, то можно утверждать, что они принадлежат к разным совокупностям. Теоретические значения критерия F для различных степеней свободы числителя и знаменателя и различных уровней значимости приводятся в таблицах приложения.

χ^2 – распределение

Закон распределения χ^2 (хи-квадрат) открыл К. Пирсон. Кривая распределения, полученная из функции хи-квадрата имеет вид

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - F)^2}{F}. \quad (3.36)$$

где f – фактические, а F – гипотетические частоты численности объектов выборки.

Для малого числа степеней свободы ν – кривая асимметрична, но с увеличением ν асимметрия уменьшается и при $\nu \rightarrow \infty$ кривая становится нормальной. Критерий χ^2 или критерий согласия (подобия) используется для оценки степени соответствия эмпирических данных определенным теоретическим предпосылкам, или проверке гипотезы об отсутствии реальных различий между фактическими и теоретически ожидаемыми наблюдениями. Это так называемая нулевая гипотеза (H_0).

Гипотеза опровергается, если $\chi^2_{\text{факт}} > \chi^2_{\text{теор}}$ и не опровергается, если $\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{теор}}$.

3.2 Задачи математической статистики при обработке опытных данных

К основным задачам математической статистики, имеющим большое значение при обработке опытных данных, относятся следующие: выбраковка «сомнительных» данных, проверка основной гипотезы, оценка существенности разности выборочных средних.

Выбраковка сомнительных данных

Перед началом статистической обработки данных их проверяют на наличие грубых ошибок, выходящих за пределы возможных, предварительно убедившись в исправности оборудования. Считается, отклонение от средней арифметической не

должно превышать предельной ошибки средней арифметической, то есть 3σ .

Правило 3σ . Отклонение, превышающее по своему значению величину 3σ , показывает, что данное измерение следует отбросить, не принимая во внимание при дальнейших вычислениях. Это соответствует выражению:

$$x_{n+1} - \bar{x} > 3\sigma, \quad (3.37)$$

где x_{n+1} – сомнительный результат измерений.

Более строго возможность выбраковки определяют:

$$\frac{x_{n+1} - \bar{x}}{\sigma} \geq t, \quad (3.38)$$

Здесь значения \bar{x} и σ вычисляют, исключив сомнительное, а значение t берут из таблиц для уровня значимости 0,01 (1 %).

Пример: На одном и том же режиме затраты мощности на привод механизма дали следующие результаты: 2,2; 2,8; 2,4; 2,6 и 4,3 кВт. Последнее значение ставим под сомнение. Без него определяем

$$\bar{x} = \frac{2,2 + 2,8 + 2,4 + 2,6}{4} = 2,5 \text{ кВт},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-0,3)^2 + 0,3^2 + (-0,1)^2 + 0,1^2}{4 - 1}} = 0,26.$$

По первой формуле условие выбраковки соблюдается

$$4,3 - 2,5 = 1,8 > 3 \cdot 0,26$$

Проверка по второй формуле при $n=4$ и $H=0,01$ дает $t=6,53$

$$\frac{4,3 - 2,5}{0,26} = 6,9 > 6,53.$$

что показывает возможность выбраковки и по этому способу.

Критерий Ирвина. В рассмотренном выше критерии при расчете \bar{x} и σ исключается выделяющийся результат наблюдения, а затем делается оценка его случайности. Ирвин предложил критерий, при применении которого расчеты \bar{x} и σ проводятся по всем данным эксперимента, а затем определяется слу-

чайность выделяющегося значения. Этот критерий основан на разности между X_N и X_{N+1} , где X_N и X_{N+1} функция:

$$\lambda = \frac{X_{N+1} - X_N}{\sigma}, \quad (3.39)$$

Эта функция табулирована Ирвином для различных надежностей.

Если полученное значение λ больше значения табличного $\lambda_{0,95}$ или $\lambda_{0,99}$ при данном N , то исследуемое наблюдение случайно. Если менее, то признавать случайным его нельзя и следует отбросить.

Пример: Имеется следующая совокупность опытных данных 3,4,5,6,7,7,8,9,9,10,11,17. Необходимо определить сомнительные значение. Воспользуемся выражением (3.39)

$$\lambda = \frac{\sum X_L}{N} = 8,0$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_2 - \bar{x})^2}{N-1}} = 3,71$$

$$\lambda = \frac{17-11}{3,71} = 1,6$$

Для $N=10$ табличное значение критерия Ирвина $\lambda_{0,95}=1,5$.

Отсюда

$$(\lambda_{0,95}=1,5) < (\lambda=1,6).$$

Следовательно, значение $X_{N+1}=17$ необходимо отбросить.

τ-критерий. Для проверки гипотезы о принадлежности «сомнительных» (крайних) вариант X_1 и X_n в малых выборках используют также критерий τ (тау). Если $\tau_{\text{факт}} \geq \tau_{\text{теор}}$, то варианта отбрасывается, если $\tau_{\text{факт}} \leq \tau_{\text{теор}}$, то варианта остается, и нулевая гипотеза о принадлежности ее к данной совокупности не отвергается.

Критические значения критерия $\tau_{\text{теор}}$ приведены в таблицах и зависят от принятого уровня значимости и от объема выборки n . Чтобы рассчитать фактическое значение критерия τ , варианты располагают в порядке возрастания $X_1; X_2; \dots; X_{n-1}; X_n$.

Пример: Имеем следующий ряд значений 7,9; 19,7; 19,9; 21,5; 27,2. Сомнительными здесь являются оба крайних значения.

Критерий τ вычисляют по отношениям.

Для X_1

$$\tau_{\text{факт}} = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1} = \frac{19,7 - 7,9}{21,5 - 7,9} = \frac{11,8}{13,6} = 0,86,$$

$$\tau_{\text{теор}_{0,95}} = 0,807.$$

$$\tau_{\text{факт}} > \tau_{\text{теор}}.$$

На уровне вероятности 95 % число 7,9 можно отбросить, как сомнительное.

Для X_n

$$\tau = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2} = \frac{27,2 - 21,5}{27,2 - 19,7} = \frac{5,7}{7,5} = 0,76,$$

$$\tau_{\text{факт}} < \tau_{\text{теор}}.$$

При уровне вероятности 95 % значение 27,2 выбраковке не подлежит.

Все это относится к прямым неоднократным измерениям одной и той же величины (например, глубины пахоты). Если же измеряемая величина является переменной (например, тяговое сопротивление плуга зависит от ряда физико-механических свойств, изменение которых не контролируется), то математически определять сомнительное значение как бракованное нецелесообразно. В таких случаях следует находить брак, при измерениях исходя из физических или биологических особенностей развития явлений (например, при замере тягового сопротивления встретился участок, по которому в прошлом проходила полевая дорога).

Проверка основной гипотезы

Все статистические оценки экспериментальных данных опираются на нормальность наблюдаемого распределения и в

случае другого распределения могут быть не справедливы. Применять эти оценки допустимо лишь при достаточной уверенности, что распределение нормальное или близкое к нему. Гипотеза о нормальности изучаемого распределения называется основной гипотезой. На практике экспериментальных исследований нам известны лишь параметры самой выборки (\bar{x}, σ) и у нас есть предположение о нормальности распределения. Поэтому в дальнейшем мы в качестве теоретического распределения всегда будем брать параметры \bar{X} и S вместо \mathbf{a} и σ .

1. Проверка нормальности распределения по асимметрии и эксцессу

У нормального распределения асимметрия и эксцесс равны нулю.

По данным ряда экспериментальных данных можно рассчитать выборочные асимметрию и эксцесс по формулам

$$A = \frac{1}{n \cdot S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3, \quad (3.40)$$

$$E = \frac{1}{n \cdot S^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 - 3, \quad (3.41)$$

Если выборочные асимметрия и эксцесс удовлетворяют неравенствам

$$A \leq 3\sqrt{D(A)}, \quad (3.42)$$

$$E \leq 5\sqrt{D(E)}. \quad (3.43)$$

где $D(A)$ – дисперсия асимметрии,

$D(E)$ – дисперсия эксцесса.

соответственно равные

$$D(A) = \frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}, \quad (3.44)$$

$$D(E) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}. \quad (3.45)$$

то наблюдаемое распределение можно считать нормальным.

Эти критерии являются приближенными и применяются при небольших объемах выборок ($n \leq 20$).

2. Оценка нормальности распределения по критерию К. Пирсона (χ^2 -распределение).

Самым строгим и надежным критерием согласия, используемым при обработке большого количества сгруппированных данных ($n > 100$), является критерий χ^2 , применяемый для оценки степени соответствия эмпирических данных теоретическим предпосылкам, нулевой гипотезе (H_0).

Критерий χ^2 рассчитывается по выражению

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - F)^2}{F}, \quad (3.46)$$

где f – фактические частоты, а F – гипотетические.

Нулевая гипотеза H_0 , предполагающая нормальность распределения опровергается, если $\chi^2_{\text{факт}} > \chi^2_{\text{теор}}$, и не опровергается, если $\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{теор}}$.

В более конкретной форме этот критерий можно определить из выражения, представляющего уточнение уравнения (3.46)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}, \quad (3.47)$$

где n_i – число данных попавших в i интервал;

n – общее число данных (наблюдений);

p_i – вероятность попадания в i интервал;

K – количество интервалов.

При $n \cdot p_i \geq 5$ величина χ^2 имеет приближенно χ^2 -распределение с $f = K - 3$ степенями свободы.

Гипотеза о нормальном характере распределения позволяет вычислить теоретические значения для вероятностей p_i , и попасть в i -й интервал по уже известной нам формуле

$$p_i \{ \alpha \leq \xi \leq \beta \} = \Phi \left(\frac{\beta - \bar{x}}{S} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha - \bar{x}}{S} \right), \quad (3.48)$$

Пример: Определить, является ли нормальным распределение 200 диаметров валиков, изготовленных на токарном станке. Данные сгруппированы по десяти интервалам с шагом 0,2 мм. Среднее значение диаметра $\bar{x} = 4,05$, стандарт $\sigma = 0,25$.

Определим

$n \cdot p_i$ и $(n_i - n \cdot p_i)^2 / n \cdot p_i$.

Результаты расчетов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 Расчет критерия Пирсона

№ интервала	Границы интервала	Средняя интервала	Частота	$n \cdot p_i$	$(n_i - n \cdot p_i)^2 / n \cdot p_i$
1	3,1-3,3	3,2	1	0,2	0,65
2	3,3-3,5	3,4	5	1,9	
3	3,5-3,7	3,6	4	10,8	
4	3,7-3,9	3,8	18	34,3	7,75
5	3,9-4,1	4,0	86	59,2	12,13
6	4,1-4,3	4,2	62	55,7	0,71
7	4,3-4,5	4,4	14	28,6	7,45
8	4,5-4,7	4,6	6	8	0,05
9	4,7-4,9	4,8	3	1,2	
10	4,9-5,1	5,0	1	0,1	
					$\Sigma X^2 = 28,74$

Пример: Определить $n \cdot p_i$ для четвертого интервала. Здесь границы интервала 3,7-3,9. Средняя интервала 3,8.

$$p_4 = P\{\alpha \leq \xi \leq \beta\} = \Phi\left(\frac{3,9 - \bar{4},8}{0,25}\right) - \Phi\left(\frac{3,7 - \bar{4},08}{0,25}\right) =$$

$$= \Phi(-0,72) - \Phi(-1,52) = -0,2642 + 0,4357 = 0,1715$$

и после умножения на 200

$$n \cdot p_i = 200 \cdot 0,1715 = 34,3.$$

Здесь первые три интервала объединены в один, так как только при этом выдерживается условие $n \cdot p_i \geq 5$. Поэтому же принципу объединены и последние три интервала. При числе степеней свободы $f = K - 3$ имеем $f = 6 - 3 = 3$. Находим в таблице при $f = 3$ $X^2_{0,95} = 7,8$, так как $28,74 > 7,8$. Следовательно, критерий Пирсона требует отклонить гипотезу нормальности.

3. Оценка существенности разности выборочных средних по t -критерию.

Рассмотрим случай, когда сравнивают средние значения двух независимых выборок, несвязанные никаким общим условием друг с другом. В этом случае по критерию Стьюдента оценивается существенность разности средних

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2, \quad (3.49)$$

В теории статистики доказано, что ошибка разности или суммы средних арифметических независимых выборок при $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ определяется соотношением

$$\mathbf{S}_d = \sqrt{\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_1}^2 + \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_2}^2}, \quad (3.50)$$

где \mathbf{S}_d – ошибка разности или суммы;

$\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_1}^2$ и $\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_2}^2$ – ошибки сравниваемых средних $\bar{\mathbf{X}}_1$ и $\bar{\mathbf{X}}_2$.

Гарантией надежности о существенности или несущественности различий между $\bar{\mathbf{X}}_1$ и $\bar{\mathbf{X}}_2$ служит отношение разности к ее ошибке. Это отношение получило название критерия существенности разности

$$\mathbf{t} = \frac{\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2}{\sqrt{\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_1}^2 + \mathbf{S}_{\bar{\mathbf{x}}_2}^2}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{S}_d}, \quad (3.51)$$

Если $\mathbf{t}_{\text{факт}} \geq \mathbf{t}_{\text{теор}}$ нулевая гипотеза об отсутствии существенных различий между средними опровергается, а если $\mathbf{t}_{\text{факт}} < \mathbf{t}_{\text{теор}}$, то различия находятся в пределах случайных колебаний для принятого уровня значимости и нулевая гипотеза не опровергается. Несущественная разность не утверждает, но и не отрицает, что между генеральными средними не существует различия. Разность могла оказаться такой вследствие недостаточного объема выборки. Повторное исследование на большем материале может дать существенную разность, а может быть и такое, что одинаковы генеральные средние сравниваемых совокупностей и тогда, сколько не испытывай, существенной разности не получишь. Теоретические значения критерия \mathbf{t} находят в таблицах по выбранному уровню значимости и числу степеней свободы, определяемому как

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 - 2. \quad (3.52)$$

Величина, указывающая границу предельным случайным отклонениям называется наименьшей существенной разностью. Ее сокращенно обозначают НСР и определяют по соотношению:

$$\text{НСР} = t S_{\bar{d}}, \quad (3.53)$$

Когда разность между средними $d > \text{НСР}$, то она признается значимой и нулевая гипотеза опровергается. Когда $d < \text{НСР}$, то нулевая гипотеза не отвергается.

Оценка существенности средней разности (сопряженные выборки)

Иногда сравниваются две выборки, в которых наблюдения первой выборки связаны (сопряжены) каким-то общим условием с единицами наблюдения второй выборки. Например, испытание двух сеялок различной конструкции методикой исследований предусмотрено проводить на одном поле, поделенном на две части по различным предшественникам и агрофонам. В этом случае оценивается существенность средней разности $\pm d$.

Для нахождения $S_{\bar{d}}$ разностным методом вычисляют разности между сопряженными парами наблюдений, определяют значение разности

$$\bar{d} = \sum d : n, \quad (3.54)$$

и ошибку средней разности по выражению

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum (d - \bar{d})^2}{n(n-1)}} \quad \text{или} \quad S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum d^2 - (\sum d)^2 : n}{n(n-1)}}, \quad (3.55)$$

Критерии существенности вычисляют по формуле

$$t = \frac{\bar{d}}{S_{\bar{d}}}, \quad (3.56)$$

Число степеней свободы находят по равенству

$$v = n - 1, \quad (3.57)$$

где n – число сопряженных пар.

4. Обоснование числа повторностей в целях снижения случайной ошибки.

Точность каждого отдельного измерения определяется точностью используемых приборов. Но сама измеряемая величина может иметь вариацию, связанную с какими-то другими случайными факторами. При учете урожая на опытных делянках это может быть разность в плодородии почв, при замере тягового сопротивления плуга – колебания физико-механических свойств почвы. Все это приводит к появлению случайной ошибки опыта. Для уменьшения значений таких ошибок опыты целесообразно повторять и брать среднюю арифметическую. Каково же должно быть количество повторностей?

Из теории ошибок известно, что количество опытов (или измерений одной и той же величины) зависит от стандарта измерений S и задания надежности результата N . Здесь под надежностью, как и ранее, подразумевается вероятность получения тех же результатов при новых измерениях этой же величины или вероятность тех же результатов при повторении опыта в аналогичных условиях. Чем больше относительные колебания результатов и чем большую надежность опыта желательно получить, тем больше должно быть повторностей.

Наиболее строго (для практического использования) эта зависимость установлена В.И. Романовским. В таблице 3.4 показана зависимость между необходимым числом повторностей опыта (измерений) и заданными надежностью и относительной ошибкой.

На практике, при исследованиях закономерностей в общем виде (без деталей), например, характера кривых развития явления достаточно надежность $N=0,7$. Для измерений связанных с конструкциями машин достаточно надежность $N=0,9$. При определении значений величин, являющихся основой для дальнейшего расчета необходима надежность $N \approx 0,99$.

Таблица 3.4 Необходимое количество опытов (измерений)

Ошибка Δ в долях стандарта	Надежность опыта, H							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
3,0	1	1	1	1	2	3	4	5
2,0	1	1	1	2	3	4	5	7
1,0	2	2	3	4	5	7	11	17
0,5	3	4	6	9	13	18	31	50
0,4	4	6	8	12	19	27	46	74
0,3	6	9	13	20	32	46	78	127
0,2	13	19	29	43	70	99	171	277
0,1	47	72	169	266	273	387	668	1089
0,05	183	285	431	659	1084	1540	2659	4338
0,01	4543	7090	10732	16436	27161	38416	66358	108307

Наиболее просто и удобно пользоваться этой таблицей, если перед основными испытаниями проводились поисковые исследования и заранее известны ориентировочные значения стандарта S и ошибки S_x (выборочной средней). В этом случае можно значительно уменьшить случайную ошибку, задавшись ее меньшим значением (выраженным в долях стандарта) и определив при этом соответствующее количество повторностей. Если поисковые опыты не проводились, и нет данных, по которым можно было бы установить значение среднего квадратичного отклонения (стандарта) S можно принять, что предельная ошибка приближенно равна наибольшей возможной статистической, то есть $\Delta_n \approx \pm 3\sigma$.

Приведем примеры использования таблицы В.И. Романовского.

Пример 1. Пусть требуется измерить микрометром какую-либо величину. Систематической ошибки нет. Примем, что предельная статистическая ошибка прибора

$$\Delta_n(a) = \pm 3\sigma \text{ и равна } 0,01 \text{ мм.}$$

Тогда одно измерение дает надежность 0,8, два – 0,9 а три – 0,95. Последнее можно прочесть так: результаты трех измерений повторяются в 95 случаях из 100, если принять предельную

ошибку микрометра $\pm 0,01$ мм. Можно сказать и так, что если требуется, чтобы в 95 случаев из 100 ошибка измерением микрометром не превышала $\pm 0,01$ мм надо сделать три измерения и взять среднюю измерений, округлив результат до сотых долей миллиметра.

Пример 2. Пусть 250 раз измерено тяговое сопротивление машины и вычислено среднее сопротивление 502 кг и стандарт 63 кг. Зададимся надежностью $\mathbf{H}=0,9$. Берем ближайшее к 250 число измерений в этом столбце, то есть 273 и получаем ошибку средней $0,1\sigma$ или $63 \cdot 0,1=6,3$ кг. Таким образом, при надежности $\mathbf{H}=0,9$ действительное тяговое сопротивление машины находится в пределах $502\pm 6,3$ кг.

Пользуясь таблицей 3.4 и данными поисковых опытов можно определить объем измерений, обеспечив заданную точность и надежность, рассчитать, например, заранее длину пути при изучении тягового сопротивления плуга.

Тут только надо не упускать из виду то обстоятельство, что следует проверять необходимую повторность опытов, по каждому из факторов и брать наибольшую, как предельную, обеспечивающую необходимую точность и надежность исследования.

Резюме

При обработке результатов измерений предлагается следующий порядок операций.

Для прямых измерений

1. Если одно (или два) измерение резко отличается по своему значению от остальных, то нужно проверить не является ли оно ошибкой.

2. Вычисляют среднее значение из \mathbf{n} -измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.58)$$

3. Находят погрешности отдельных измерений

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i, \quad (3.59)$$

4. Вычисляют квадраты погрешностей отдельных измерений

$$\Delta x_i^2 = (\bar{x} - x_i)^2, \quad (3.60)$$

5. Определяют среднюю квадратичную погрешность серии измерений или согласно ранее принятой терминологии ошибку выборочной средней из выражения

$$\Delta S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (3.61)$$

6. Задаются значением коэффициента надежности α .

7. Определяют коэффициент Стьюдента $t_\alpha(n)$ для заданной надежности α и числе произведенных измерений n .

8. Находят границы доверительного интервала (погрешность результата измерений):

$$\Delta x = t_\alpha(n) \cdot \Delta S_{\bar{x}}, \quad (3.62)$$

9. Если величина погрешности результата измерений (определяемая в п. 8) окажется сравнимой с величиной погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину:

$$\Delta x = \sqrt{t_\alpha^2(n) \cdot \Delta S_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{K_\alpha}{3}\right)^2 \cdot \delta^2}, \quad (3.63)$$

где δ – величина погрешности прибора, а $K_\alpha = t_\alpha(\infty)$.

10. Окончательный результат записывается в виде

$$x = \bar{x} + \Delta x, \quad (3.64)$$

11. Оценивается относительная погрешность результата серии измерений:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%, \quad (3.65)$$

Для косвенных измерений

1. Для каждой серии измерений величин, входящих в определение искомой величины (по формуле) производится обработка данных как и для прямых измерений. При этом для всех

измеряемых величин задается одно и то же значение надежности α .

2. Находятся выражения для абсолютной и относительной погрешностей искомой величина в соответствии с конкретным видом функциональной зависимости (см. таблицы приложений).

3. Оценивают границы доверительного интервала для результатов косвенных измерений:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2}, \quad (3.66)$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial a}$, $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$ – частные производные функции $f(a,b,c)$ по переменным a , b , c соответственно, вычисляются при $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$, $c = \bar{c}$.

Δa , Δb , Δc – абсолютная погрешность измерительных приборов.

4. Окончательный результат записывается в виде:

$$f(a,b,c\dots) = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \pm \Delta f, \quad (3.67)$$

5. Определяется относительная погрешность результата серии косвенных измерений:

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{f} \cdot 100\%. \quad (3.68)$$